Ex. 2.82

29 de novembro de 2020 15:11

2.82. O número de avarias por mês nos comboios da linha de Sintra que provocam a interrupção da circulação é uma variável aleatória X com distribuição de Poisson de parâmetro $\lambda = 3.5$. O número de avarias num dado mês é independente do número de avarias nos outros meses.
Por outro lado, o tempo necessário para restabelecer a circulação ferroviária (tempo de interrupção da circulação) após uma avaria é uma variável aleatória Y com distribuição $\mathcal{N}(3, 0.75)$ (em horas), e também aqui, o tempo de interrupção da circulação após uma avaria é independente dos tempos de interrupção da circulação após outras avarias.

a) Qual o número esperado de avarias num dado mês? E num ano?

b) Qual a probabilidade de o tempo de interrupção da circulação após uma avaria exceder 4.5 horas?

c) Tendo ocorrido duas avarias num mês, qual a probabilidade de o tempo total de interrupção da circulação após as duas avarias ter excedido 8 horas?

d) Caracterize a lei da variável aleatória que designa o tempo total de interrupção da circulação num mês em que ocorram K avarias.

X V.A. Nº AVARIAS POR MÊS ; $X \frown \mathcal{P}(\lambda = 3.5)$

Y V.A. TEMPO PARA RESTABELECER A CIRCULAÇÃO (h)

$Y \frown N(\mu = 3, \sigma = 0.75)$

a) $E[X] = \lambda = 3.5$

COMO O NÚMERO DE AVARIAS NUM MÊS É INDEPENDENTE DO NÚMERO DE AVARIAS NOS OUTROS MESES, E INDICANDO POR X_i O Nº AVARIAS NO MÊS i,

$T = X_1 + X_2 + \cdots + X_{12}$ (T V.A. AVARIAS P/ANO)

Teorema 7–Teorema da estabilidade da soma

Se as v.a. X_i $i = 1, ..., k$ são independentes e $X_i \frown \mathcal{P}(\lambda_i)$ então

$$\sum_{i=1}^{k} X_i \frown \mathcal{P}\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right).$$

E $T \frown \mathcal{P}(\lambda)$, COM $\lambda = \underbrace{3.5 + \cdots + 3.5}_{12 \text{ VEZES}} = 42$

ASSIM $E[T] = 42$ AVARIAS

NOTA: É POSSÍVEL RESPONDER À QUESTÃO DE FORMA MAIS SIMPLES:

$$E[T] = E[X_1 + \dots + X_{12}] \underset{X_1,\dots,X_{12} \text{ v.a ind}}{=} E[X_1] + \dots + E[X_{12}] = 12 \times 3.5 = 42$$

b) $P(Y > 4.5) = P\left(\underbrace{\frac{Y-3}{0.75}}_{z} > \underbrace{\frac{4.5-3}{0.75}}_{2}\right) = P(z>2) = 1 - P(z<2) = 1 - \phi(2) = 1 - 0.97725 =$

$= 0.02275 \approx 2.275\%$

c) Y_1 V.A. TEMPO DE INTERRUPÇÃO PARA A 1ª AVARIA; $Y_1 \cap N(3, 0.75)$

Y_2 " " " " " 2ª " Y_2 "

SUPONDO QUE Y_1 E Y_2 SÃO V.A. INDEPENDENTES,

$$Y_1 + Y_2 \cap N\left(\mu = \underbrace{3+3}_{6},\ \sigma = \underbrace{\sqrt{0.75^2 + 0.75^2}}\right)$$

Sqrt(0.75^2+0.75^2)=1.060660171779821

PEDE-SE $P(Y_1 + Y_2 > 8) = P\left(\underbrace{\frac{Y_1+Y_2-6}{1.06}}_{z} > \underbrace{\frac{8-6}{1.06}}\right) =$

(8-6)/1.06=1.8868

$= P(z > 1.8868) = 1 - P(z \leq 1.8868) \approx 1 - \underset{\text{TABELA}}{\phi(1.89)} = 1 - 0.96995 = 0.03005$

d) GENERALIZANDO PARA K AVARIAS, $S_K = X_1 + \dots + X_K$

$$\text{E} \quad S_n \cap N\left(\mu = 3K,\ \sigma = \underbrace{\sqrt{0.75^2 \times K}}_{0.75\sqrt{K}}\right)$$